Language: **Georgian** Day: **1**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

ოთხშაბათი, 16 ივნისი, 2008 წ

ამოცანა 1. ვთქვათ H –მახვილკუთხა ABC სამკუთხედის სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილია. წრეწირი, რომლის ცენტრი BC გვერდის შუა წერტილია და გადის H წეტილზე, BC გვერდს კვეთს A_1 და A_2 წერტილებში. ანალოგიურად, წრეწირი, რომლის ცენტრი CA გვერდის შუა წერტილია და გადის H წერტილზე CA გვერდს კვეთს B_1 და B_2 წერტილებში და წრეწირი, რომლის ცენტრი AB გვერდის შუა წერტილია და გადის H წერტილზე AB გვერდს კვეთს C_1 და C_2 წერტილებში. დაამტკიცეთ რომ $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ წერტილები მდებარეობენ ერთ წრეწრზე.

ამოცანა 2. (a) დაამტკიცეთ , რომ

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

ყველა ისეთი ნამდვილი x, y, z რიცხვებისათვის, რომელთაგან თითოეული განსხვავებულია ერთსაგან და $xyz=1$.

(b) დაამტკიცეთ , რომ ტოლობას ადგილი აქვს უსასრულოდ ბევრი ისეთი x, y, z , ერთისაგან განსხვავებული რაციონალური რიცხვების სამეულისათვის, რომ $xyz=1$.

ამოცანა 3. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს უსასრულოდ ბევრი ისეთი ნატურალური რიცხვი n , რომ რიცხვს n^2+1 ექნება $2n+\sqrt{2n}$ - ზე უფრო დიდი მარტივი გამყოფი.

Language: Georgian

სამუშაო დრო: 4 სთ. ,30 წთ.
თითეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

ხუთშაბთი, 17 ივნისი, 2008 წ.

ამოცანა 4. იპოვეთ ყველა $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ ფუნქცია (ანუ f არის დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია და ღებულობს დადებით მნიშვნელობებს), რომელთათვისაც

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

ყოველი ისეთი დადებითი w, x, y, z რიცხვებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ $wx=yz$ ტოლობას.

ამოცანა 5. ვთქვათ n და k ისეთი ნატურალური რიცხვებია, რომ $k\geq n$ და $(k-n)$ ლუწია. გვაქვს $2n$ ნათურა გადანომრილი რიცხვებით $1, 2, \ldots, 2n$. თითოეული ნათურა შესაძლოა იყოს შემდეგი ორი მდგომარობიდან ერთში: *ჩართული* (ანთებული) ან *გამორთული* (ჩამქრალი). დასაწყისში ყველა ნათურა გამორთულია. განიხილება *ნაბიჯების* დალაგებული მიმდევრობები: ყოველ ნაბიჯზე ზუსტად ერთი ნათურა იცვლის მდგომარეობას საწინაღმდეგო მდგომარეობაზე (ჩართულიდან გამორთულზე ან გამორთულიდან ჩართულზე)

ავღნიშნოთ N– ით რაოდენობა ისეთი მიმდევრობებისა, რომელაგან თითოეული შედგება k ნაბიჯისაგან და მიგვიყვანს ისეთ სიტუაციამდე, რომ ყველა ნათურა ნომრებით 1– დან n – ის ჩათვლით ჩართულია, ხოლო ყველა ნათურა ნომრებით $(n+1)$ – დან $2n$ – ის ჩათვლით გამორთული.

ავღნიშნოთ M– ით რაოდენობა ისეთი მიმდევრობებისა, რომელაგან თითოეული შედგება k ნაბიჯისაგან და მიგვიყვანს ისეთ სიტუაციამდე, რომ ისევ ყველა ნათურა ნომრებით 1– დან n – ის ჩათვლით ჩართულია, ყველა ნათურა ნომრე-ბით $(n+1)$ – დან $2n$ – ის ჩათვლით გამორთული, მაგრამ ამასთან ერთად არცერთი ნათურა ნომრებით $(n+1)$ – დან $2n$ – ის ჩათვლით არცერთხელ არ იცვლიდა თავის მდგომარეობას.

იპოვეთ N/M შეფარდების სიდიდე.

ამოცანა 6. ვთქვათ $ABCD$ ამოზნექილი ოთხკუთხედია, რომელშიც $|BA|\neq|BC|$. ავღნიშნოთ, შესაბამისად, ω_1 – ით და ω_2– ით ABC და ADC სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირები. დავუშვათ, რომ არსებობს ω წრეწირი, რომელიც ეხება BA მონაკვეთის გაგრძელებას A წერტილიდან, BC მონაკვეთის გაგრძელებას C წერტილიდან და ეხება AD *და* CD *წრფეებს.* დაამტკიცეთ, რომ ω_1 და ω_2 წრეწირების საერთო გარე მხებები იკვეთებიან ω წრეწირზე.

სამუშაო დრო: 4 სთ. ,30 წთ.
თითეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით