მატრიცები
მოქმედებები მატრიცებზე

მატრიცა ეწოდება მართკუთხოვან ცხრილს, რომელშიც რიცხვები განლაგებულია სტრიქონებად და სვეტებად.

მაგალითად, მატრიცა, რომელსაც ორი სტრიქონი და სამი სვეტი აქვს: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ –პირველ სტრიქონს ადგენს რიცხვები: 2,3,1. მეორეს: 1,5,1.

რიცხვებს, რომლისგანაც მატრიცა შედგება, ვუწოდოთ მატრიცის ელემენტები.

მატრიცებს აღვნიშნავთ ასოებით: $A, B, C, \cdots$

მატრიცის ელემენტები შეიძლება აღვნიშნოთ ერთი ასოთი, რომელსაც ორი ინდექსი აქვს, მაგალითად: a_{23} , პირველი ინდექსი გვიჩვენებს სტრიქონის ნომერს, მეორე –სვეტის ნომერს. მაგალითი:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

ეს არის მატრიცა, რომელსაც აქვს ორი სტრიქონი და სამი სვეტი.

მატრიცა, რომელსაც m სტრიქონი აქვს და n სვეტი ასე ჩაიწერება:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

შეიძლება ეს მატრიცა მოკლედ ასეც ჩავწეროთ:

$$A = (a_{ik})_{mn} \quad , \quad B = (b_{ik})_{mn}$$

მაშინ $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ ისეთი მატრიცაა, რომელიც ასე განისაზღვრება:

$$C = (c_{ik})_{mn} \quad \text{და} \quad c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \, .$$

მაგალითად:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ik})_{mn}$ **მატრიცის ნამრავლი $\boldsymbol{\lambda}$ რიცხვზე** არის მატრიცა, რომლის ელემენტებია λa_{ik} , ე.ი. ყველა ელემენტი მრავლდება λ რიცხვზე.

ნულოვანი მატრიცა ეწოდება მატრიცს, რომლის ყველა ელემენტი ნულია. აღვნიშნავთ ასე: θ . ე.ი.:

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

მატრიცებზე **მოქმედებების თვისებები**:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + \theta = A$
4. თუ $A + B = \theta$, მაშინ $B -$ს ეწოდება $A -$ს მოპირდაპირე და ასე აღინიშნება: $B = -A$
5. $1 \cdot A = A$
6. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
7. $(\lambda + r)A = \lambda A + rA$
8. $\lambda(rA) = r(\lambda A) = (\lambda r)A$

თუ მატრიცის სტრიქონების რიცხვი უდრის სვეტების რიცხვს, მაშინ ასეთ მატრიცას ეწოდება **კვადრატული მატრიცა**.

მატრიცების გამრავლება

ნებისმიერი ორი მატრიცის გამრავლება არ არის განსაზღვრული.

ვამრავლებთ A_{mn} მატრიცას B_{nl} მატრიცაზე და შედეგად ვიღებთ C_{ml} მატრიცს, რომლის ელემენტები ასე განისაზღვრება:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

სადაც: $i = 1,2,\cdots,m$ და $k = 1,2,\cdots,l$.

მაშასადამე, თუ $C = A \cdot B$, მაშინ C მატრიცის C_{ik} ელემენტი მიიღება A მატრიცის $i-$ური სტრიქონის „გადამრავლებით“ B მატრიცის $k-$ურ სვეტზე, ანუ C_{ik} ელემენტი არის A მატრიცის $i-$ური სტრიქონის ელემენტების B მატრიცის $k-$ური სვეტის შესაბამის ელემენტებზე ნამრავლთა ჯამი.

მაგალითი:

ვთქვათ, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{32}$ ეს მატრიცი შეიძლება გავამრავლოთ $2 \cdot 2$ მატრიცაზე, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. მაშინ:

$$A_{3\cdot 2} \cdot B_{2\cdot 2} = C_{3\cdot 2}$$

$$c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \qquad c_{12} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2$$

$$c_{21} = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 5 \qquad c_{22} = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2$$

$$c_{31} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \qquad c_{32} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2$$

ე.ი. $C = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 28 & 19 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}_{2\cdot 3}$

ცხადია, თუ A მრავლდება B–ზე, შეიძლება B ვერ გავამრავლოთ A–ზე.

თუ A და B ერთი და იგივე რიგის მატრიცებია და შეგვიძლია ვიპოვოთ $A \cdot B$ და $B \cdot A$ ნამრავლები, მაგრამ ამ შემთხვევაშიც, საზოგადოდ, $A \cdot B \neq B \cdot A$

გაუსის მეთოდი

ვიხილავთ n უცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემას, რომელიც შეიცავს m განტოლებას.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_2 = b_2 \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ a_{m1}a_{m2} + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნი ეწოდება $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ $n-$ეულს, რომელთა ჩასმით სისტემაში, მიიღება სწორი ტოლობები. თუ სისტემისთვის არსებობს ამონახსნი, სისტემას ქვია თავსებადი, თუ არა აქვს ამონახსნი არათავსებადი ქვია. თუ ერთზე მეტი ამონახსნი აქვს, მას ქვია განზღვრელი.

ორ სისტემას ქვია ტოლფასი, თუ მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ერთიდაიგივეა.

გაუსის მეთოდით სისტემის ამოხსნისას შემდეგ ოპერაციებს ვაწარმოებთ: რომელიმე განტოლებას ვამრავლებთ რაიმე რიცხვზე და ვუმატებთ სხვა განტოლებებს.

თუ $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ $-$მაშინ ასეთ განტოლებებს ამოვაგდებთ.

თუ რომელიმე განტოლება მიიღებს სახეს: $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n \neq 0$ მაშინ ვწყვეტთ ამოხსნას რადგან სისტემას ამ შემთხვევაში ამონასხნი არააქვს.

ვთქვათ, $a^{11} \neq 0$, (რომელიმე კოეფიციენტი $\neq 0$) -ერთერთი პროცესი არის კოეფიციენტების ნომრების შეცვლა, შეგვიძლია აგრეთვე განტოლებების გადანაცვლება, ამიტომ ამას ყოველთვის მივაღწევთ, ამიტომ ვიგულისხმოთ რომ $a_{11} \neq 0$. მაშინ შეგვიძლია პირველი განტოლების გარდა ყველგან გამოვრიცხოთ x_1 ცვლადი. ამისთვის პირველი განტოლება დავტოვოთ უცვლელი, ხოლო ყოველ შემდგომ განტოლებას დავუმატოთ $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ $-$ზე გამრავლებული პირველი განტოლება.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_2 = b_2 \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ a_{m1}a_{m2} + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \left| \begin{matrix} \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} \\ \cdots \\ \frac{a_{m1}}{a_{11}} \end{matrix} \right. \quad =>$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{'}x_2 + \cdots + a_{2n}^{'}x_n = b_2^{'} \\ a_{m2}^{'}x_2 + \cdots + a_{mn}^{'}x_n = b_m^{'} \end{cases} \qquad =>$$

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{1n}c_n = l_1 \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = l_2 \\ c_{kk}x_k + \cdots + c_{kn}x_n = l_k \end{cases}$$

თუ ბოლო განტოლება ორუცნობიანია მაშინ სისტემას აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი. თუ ერთუცნობიანია მაშინ სისტემას ერთადერთი ამონახსნი აქვს.

ლექცია 12

გადანაცვლების ლუწობა და კენტობა

გავიხსენოთ, რომ ***n*-ელემენტიანი გადანაცვლება** ეწოდება *n*-ელემენტიანი სიმრავლის ყოველ დალაგებას. *n*-ელემენტიან გადანაცვლებათა რიცხვი არის *n*!

გადანაცვლებები შეიძლება შევადგინოთ პირველ *n* ნატურალური რიცხვისგან. მაგალითად, პირველი სამი ნატურალური რიცხვისგან შეიძლება შევადგინოთ 6 გადანაცვლება (6=3!); 123, 132, 213, 231 და 321.

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე გადანაცვლება პირველი *n* ნატურალური რიცხვისგან. ვიტყვით, რომ ამ გადანაცვალებაში რაიმე ორი რიცხვი ქმნის ინვერსიას, თუ ის რიცხვი, რომელიც მეტია წინ უსწრებს მასზე ნაკლებს. მაგალითად, 132 გადანაცვლებაში 3 და 2 ქმნის ინვერსიას.

ამ გადანაცვლებაში ინვერსიათა რიცხვი მხოლოდ ერთია – მხოლოდ 3 და 2 ქმნის ინვერსიას, ინვერსიათა რიცხვს ასეთ ჩავწერთ: [1, 3, 2], ე. ი. [1, 3, 2]=1.

განვიხილოთ 7-ელემენტიანი გადანაცვლება: 2, 5, 4, 7, 3, 6. აქ ინვერსიათა რიცხვი არის 7, [2, 5, 1, 4, 7, 3, 6]=7. მართლაც, რიცხვი 1 ქმნის 2 ინვერსიას, რიცხვი 2 – არცერთს, რიცხვი 3 – 3-ს, რიცხვი 4 – 1-ს, რიცხვი 5 – არცერთს, რიცხვი 6 – ერთს, რიცხვი 7 – არცერთს, სულ – 2+3+1+1=7.

გადანაცვლებას ეწოდება ლუწი, თუ მასში ინვერსიათა რიცხვი ლუწია, გადანაცვლებას ეწოდება კენტი თუ მასში ინვერსიათა რიცხვი კენტია. თუ გადანაცვლებაში ორ რიცხვს ადგილებს შევუცვლით, მაშინ, ცხადია, გადანაცვლების ლუწობა, ან კენტობა იცვლება – ლუწი გახდება კენტი და კენტი – ლუწი. ასეც ვიტყვით: ტრანსპოზიციის შემდეგ (ორი რიცხვის ადგილების შეცვლის შემდეგ) ლუწი გადანაცვლება გახდება კენტი და კენტი გახდება – ლუწი.

n! გადანაცვლებიდან ნახევარი ლუწია, მეორე ნახევარი – კენტი.

n-ური რიგის დეტერმინანტი

განვიხილოთ n-ური რიგის კვადრატული მატრიცა:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

n-ური რიგის მატრიცის **n-ური რიგის დეტერმინანტი** ეწოდება ამ მატრიცის ელემენტების ნამრავლთა ჯამს; თითოეულ ნამრავლში შედის n თანამამრავლი, რომლებიც თითო-თითოდ არის აღებული თითოეული სტრიქონიდან და თითოეული სვეტიდან. შესაკრებების რაოდენობა არის $n!$ თითოეულ შესაკრებს აქვს + ან – ნიშანი, რომელიც შემდეგნაირად განისაზღვრება: თუ თითოეულ ნამრავლში თანამამრავლები შესაბამისი სვეტების ნომრების ზრდის მიხედვითაა დალაგებული, მაშინ იმ ნამრავლს, რომელშიც სტრიქონების ნომრები ქმნის ლუწ გადანაცვლებას „+“ ნიშანი აქვს, წინააღმდეგ შემთხვევაში – მინუს ნიშანი (როცა სტრიქონების ნომრები ქმნის კენტ გადანაცვლებას). n-ური რიგის დეტერმინანტს ასე აღვნიშნავთ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ეს არის რიცხვი, რომელიც, ზემოთთქმულის თანახმად, ასე გამოითვლება:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1,i_2,\dots i_n)} (-1)^{[i_1,i_2,\dots i_n]} a_{i_{11}} a_{i_{22}} a_{i_{33}} \dots a_{i_{nn}}$$

ჯამი ვრცელდება ყველა გადანაცვლებაზე, მაშასადამე, შესაკრებების რაოდენობა არის $n!$

თეორემა 1. n-ური რიგის დეტერმინანტში წევრი $a_{l_1k_1}a_{l_2k_2}\dots a_{l_nk_n}$ შედის $(-1)^{[l_1,l_2,\dots l_n]+[k_1,k_2,\dots,k_n]}$ ნიშნით.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ, თუ $a_{l_1k_1}a_{l_2k_2}\dots a_{l_nk_n}$ ნამრავლში ორ თანამამრავლს ადგილებს შევუცვლით, მაშინ $l_1, l_2, \dots, l_n$ და $k_1, k_2, \dots, k_n$ გადანაცვლებებში თითო

ტრანსპოზაცია მოხდება, ამიტომ $[l_1, l_2, ..., l_n]+[k_1, k_2, ..., k_n]$ არ შეიცვლის ლუწ-კენტოვნებას.

ვთქვათ, მოცემულ გადანაცვლებაში წევრებს ისე შევუცვალეთ ადგილები, რომ მეორე ინდექსები ადგენს მთავარ გადანაცვლებას: 1, 2, ... n. თუ პირველი ინდექსები ადგენს $m_1, m_2, ..., m_n$ გადანაცვლებას, მაშინ შესაბამისი წევრის ნიშანი უნდა იყოს: $(-1)^{[m_1,m_2,...,m_n]}$. ეს ნიშანი კი დაემთხვევა $(-1)^{[l_1,l_2,...l_n]+[k_1,k_2,...,k_n]}$ ნიშანს.

n-ური რიგის დეტერმინანტის თვისებები.

დეტერმინანტში ორი სტრიქონის (ან სვეტის) ადგილების შეცვლას ვუწოდოთ ამ სტრიქონების (სვეტების) **ტრანსპოზიცია**.

ვთქვათ, სტრიქონები გადავნომრეთ ზემოდან ქვემოთ, სვეტები – მარცხნიდან – მარჯვნივ. ყოველი სტრიქონის შეცვლას იგივე ნომრის სვეტით ტრანსპონირება ვუწოდოთ.

I თვისება. ტრანსპონირების დროს დეტერმინანტი არ იცვლება.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია დეტერმინანტი:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ & ... & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

მისი ტრანსპონირებით მიიღება დეტერმინანტი:

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ & ... & & \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ცხადია, პირველი დეტერმინანტის ყოველი შესაკრების მოდული დაემთხვევა D'-ის რომელიღაც შესაკრების მოდულს, რადგან ყოველი წევრი შედგება n თანამამრავლისგან, ისე, რომ თითოეული სტრიქონიდან და თითოეული სვეტიდან თითო ელემენტი აიღება. ანალოგიურად, D'-ის ყოველი წევრის მოდული დაემთხვევა D-ს რომელიღაც წევრის მოდულს. ე. ი. $a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}...a_{i_nk_n}$ – წევრი არის პირველ დეტერმინანტშიც და მეორეშიც, მაგრამ მისი ნიშანი ორივეში ერთი და იგივეა და ტოლია $(-1)^{[i_1,i_2,...,i_n]+[k_1,k_2,...,k_n]}$ პირველ დეტერმინანტში $i_1,i_2,....i_n$ სტრიქონების ნომრებია, მეორეში – სვეტების.

II თვისება. დეტერმინანტის რომელიმე ორი სტრიქონის, ან სვეტის ტრანსპოზიციით დეტერმინანტი ნიშანს იცვლის.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია დეტერმინანტი:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & \dots & a_{1q} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & \dots & a_{2q} & \dots & a_{2n} \\ & & & \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} & \dots & a_{nq} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

p და q ნომრის მქონე სვეტების ტრანსპოზიციის შემდეგ მიიღება დეტერმინანტი:

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} & \dots & a_{1p} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} & \dots & a_{2p} & \dots & a_{2n} \\ & & & \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nq} & \dots & a_{np} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

განვიხილოთ D_1-ის რაიმე შესაკრები ნიშნის გათვალისწინების გარეშე:

$$a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_p p} \dots a_{i_q q} \dots a_{i_n n}$$

ეს წევრი შედის D_1-ში $(-1)^{[i_1, i_2, \dots, i_n]}$ ნიშნით.

ეს შესაკრები D_2-შიც არის რაღაც ნიშნით. ვიპოვოთ ეს ნიშანი. მაგრამ D_2-ში სვეტების ნომრები უნდა დავალაგოთ ზრდის მიხედვით. ამიტომ ასე გადავწერთ:

$$a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_q q} \dots a_{i_p p} \dots a_{i_n n}$$

აქ უკვე სვეტები ზრდის მიხედვითაა დალაგებული, რადგან a_{iq} მოთავსებულია სვეტში, რომლის ნომერია p. ამიტომ ეს ნამრავლი D_2-ში შედის $(-1)^{[i_1, i_2, \dots, i_q, \dots, i_p \dots, i_n]}$ ნიშნით.

ამრიგად, D_1-ის ყოველი წევრი არის D_2-ის წევრი და აქვს მოპირდაპირე ნიშანი, რადგან $[i_1, i_2, \dots, i_p, \dots, i_q, \dots, i_n]$ გადანაცვლება ლუწია, თუ $[i_1, i_2, \dots, i_q, \dots, i_p, \dots, i_n]$ – კენტია და კენტია, როცა ეს მეორე გადანაცვლება ლუწია.

იგივე თვისება ჭეშმარიტია სტრიქონებისთვის, რადგან ტრანსპონირებით, სვეტები გარდაიქმნება სტრიქონებად.

შედეგი. თუ დეტერმინანტში ორი სტრიქონი, ან ორი სვეტი ტოლია, მაშინ ეს დეტერმინანტი ნულია.

დამტკიცება. ვთქვათ, ორი სტრიქონი ტოლია. შევუცვალოთ მათ ადგილები. ერთის მხრივ დეტერმინანტი არ იცვლება, მეორეს მხრივ – იცვლის ნიშანს, ამიტომ დეტერმინანტი ნულია.

III თვისება. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის, ან სვეტის ყველა ელემენტს რაიმე რიცხვზე გავამრავლებთ, მაშინ დეტერმინანტი გამრავლდება ამ რიცხვზე.

დამტკიცება. მსჯელობა ჩავატაროთ პირველი სვეტის შემთხვევაში.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D_1=\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ka_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ ka_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ცხადია, $D_1=\sum\limits_{(i_1,i_2,\dots i_n)}(-1)^{[i_1,i_2,\dots i_n]}(ka_{i_1 1})a_{i_2 2}a_{i_3 3}\dots a_{i_n n}=k\sum\limits_{(i_1,i_2,\dots i_n)}(-1)^{[i_1,i_2,\dots i_n]}ka_{i_1 1}a_{i_2 2}a_{i_3 3}\dots a_{i_n n}=kD$.

შედეგი. თუ დეტერმინანტში ორი სტრიქონი, ან ორი სვეტი პროპორციულია, მაშინ დეტერმინანტი ნულია.

III თვისების შედეგი. თუ დეტერმინანტში ორი სტრიქონი, ან ორი სვეტი პროპორციულია, მაშინ დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

IV თვისება. ვთქვათ, დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის ელემენტები ორი შესაკრების ჯამია, $a_{ik}=b_{ik}+c_{ik}$, ანუ

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & b_{1k}+c_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & b_{2k}+c_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & b_{nk}+c_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

მაშინ $D=D_1+D_2$, სადაც

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & b_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & b_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & c_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & c_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & c_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

დამტკიცება:

$$D=\sum_{(i_1,i_2,\dots i_n)}(-1)^{[i_1,i_2,\dots i_n]}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\dots b_{i_k k}\dots a_{i_n n}+\sum_{(i_1,i_2,\dots i_n)}(-1)^{[i_1,i_2,\dots i_n]}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\dots c_{i_k k}\dots a_{i_n n}=D_1+D_2.$$

შედეგი. დეტერმინანტი არ შეიცვლება თუ რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ელემენტებს დავუმატებთ სხვა სტრიქონის ან სვეტის ელემენტებისა და რაიმე რიცხვის რიცხვის ნამრავლს.

განსაზღვრება. n-ური რიგის დეტერმინანტის a_{ik} ელემენტის მინორი M_{ik} ეწოდება n-1 რიგის დეტერმინანტს, რომელიც მიიღება i-ური სტრიქონისა და k-ური სვეტის ამოშლით.

n-ური რიგის დეტერმინანტის a_{ik} ელემენტის ალგებრული დამატება A_{ik} კი უწოდება რიცხვს: $(-1)^{i+k}M_{ik}$.

თეორემა. თუ n-ური რიგის D დეტერმინანტში რომელიმე k-ური სვეტის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია გარდა a_{ik} ელემენტისა, მაშინ

$$D = a_{ik} \cdot A_{ik}.$$

დამტკიცება. ჯერ, ვთქვათ, i=k=1, ე. ი. გვაქვს დეტერმინანტი:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ ცხადია, } D = \sum_{(i_1, i_2, \dots i_n)} (-1)^{[i_1, i_2, \dots i_n]} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} = a_{11} M_{11} = a_{11} A_{11}.$$

განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(i–1) ტრანსპოზიციით i-ური სტრიონი შეიძლება პირველ სტრიქონად ვაქციოთ, (k–1) ტრანსპოზიციით კი k-ური სვეტი გადაიქცევა პირველ სვეტად და a_{ik} დაიკავებს a_{11}-ის ადგილს.

ამიტომ $$a_{ik} M_{ik} = a_{ik} A_{ik}$$

დეტერმინანტის V თვისება. n-ური რიგის დეტერმინანტი ტოლია რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ელემენტების მათსავე ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამის:

$$D = a_{ik}A_{ik} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk}.$$

დამტკიცება. $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

იგი შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1k}+0+\dots+0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0+a_{2k}+\dots+0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0+0+\dots+a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$= a_kA_k+a_{2k}A_{2k}+ \dots + a_{nk}A_{nk}.$

VI თვისება: n-ური რიგის დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ელემენტების სხვა სტრიქონის ან სვეტის ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი ნულის ტოლია.

ვთქვათ,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2s} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{ns} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

განვიხილოთ დეტერმინანტი:

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ცხადია, $D_1=0$, მეორეს მხრივ, s-ური სვეტის მიხედვით წინა თვისების გამოყენება გვაძლევს:

$$D_1=a_{1k}A_{1s}+a_{2k}A_{2s}+\dots+a_{nk}A_{ns}$$

ე. ი.

$$\boldsymbol{a_{1k}A_{1s}+a_{2k}A_{2s}+\dots+a_{nk}A_{ns}=0.}$$

შებრუნებული მატრიცა. მისი არსებობის პირობა.

კვადრატული A მატრიცის შებრუნებული ეწოდება მატრიცას, რომლის ნამრავლი მოცემულ A მატრიცაზე ერთეულოვანი მატრიცაა, ე. ი. არის მატრიცა:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

A-ს შებრუნებულს ასე აღვნიშნავთ: A^{-1}

ე. ი. $\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = E}$.

თეორემა. თუ კვადრატული A მატრიცის დეტერმინანტი ნული არ არის, მაშინ

არსებობს ერთადერთი მატრიცა, რომელიც A-ს შებრუნებულია და იგი ასე მოიცემა:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{pmatrix},$$ სადაც

$A_{11}, A_{12}, A_{21}, \dots, A_{nn}$ არის A მატრიცის ელემენტების ალგებრული დამატებებია, D არის A მატრიცის დეტერმინანტი.

დამტკიცება. ადვილად შევამოწმებთ, რომ $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E$.

მაგალითად, ნამრავლის c_{11} ელემენტი ასე გამოითვლება

$$a_{11} \cdot \frac{A_{11}}{D} + a_{12} \cdot \frac{A_{12}}{D} + \dots + a_{1n} \cdot \frac{A_{1n}}{D} = \frac{D}{D} = 1;$$

c_{12} ასე გამოითვლება:

$$a_{11} \cdot \frac{A_{21}}{D} + a_{12} \cdot \frac{A_{22}}{D} + \dots + a_{1n} \cdot \frac{A_{2n}}{D} = \frac{0}{D} = 0.$$

ერთადერთობა.

ვთქვათ, $B \cdot A = E$

მაშინ $(B \cdot A)A^{-1} = E \cdot A^{-1}$

$B(A \cdot A^{-1}) = A^{-1}$,

$B = A^{-1}$.

თუ $\det A = 0$, მაშინ A მატრიცს შებრუნებული არა აქვს.

მართლაც, თუ არსებობს A^{-1}, მაშინ

$A \cdot A^{-1} = E$

$\det (A \cdot A^{-1}) = 1$

$\det A \neq 0 \ \det A^{-1} = 0$

რადგან $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$.

მატრიცას $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ ვუწოდოთ A-ს მიკავშირებული. მაშასადამე,

$A^{-1} = \frac{1}{D} \cdot A^*$, სადაც D არის A-ს დეტერმინანტი.

ლექცია 13

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

განვიხილოთ n-უცნობიან n წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\backslash a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_1$$
$$\text{- - - - - - -} \qquad (1)$$
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n$$

ამ სისტემის ამონახსნი ეწოდება რიცხვთა დალაგებულ n-ეულს (α_1, α_2, ... α_n), რომლის ჩასმით (x_1, x_2, ..., x_n) უცნობთა სისტემის ნაცვლად, ანუ $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, ... $x_n=\alpha_n$ ჩასმით,

მიიღება ჭეშმარიტი ტოლობები:

$$a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ldots+a_{1n}\alpha_n=b_1$$
$$a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\ldots+a_{2n}\alpha_n=b_1$$
$$\text{- - - - - -}$$
$$a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\ldots+a_{nn}\alpha_n=b_n$$

(1) სისტემის დეტერმინანტი ეწოდება n-ური რიგის Δ დეტერმინანტს:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

დამხმარე დეტერმინანტები კი ეწოდება დეტერმინანტებს:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \quad \Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

ე. ი. ყოველი დამხმარე დეტერმინანტი Δ_i(i=1, 2, ... n) მიიღება Δ-სგან თავისუფალი წევრების – b_1, b_2, ... b_n რიცხვების – ჩასმით i-ური სვეტში უცნობების შესაბამისი კოეფიციენტების ნაცვლად.

კრამერის თეორემა. თუ n-უცნობიან n წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი $\Delta \neq 0$, მაშინ სისტემას ერთადერთი ამონახსნი აქვს, რომელიც არის $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, ..., \frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$, ანუ $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$.

დამტკიცება. ვთქვათ, (1) სისტემის აქვს ამონახსნი: (x_1, x_2, ..., x_n) ამონახსნია, მაშინ გვაქვს:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+ ... +a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+ ... +a_{2n}x_n=b_1$$
$$- - - - - -$$
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+ ... +a_{nn}x_n=b_n$$

პირველი ტოლობა გავამრავლოთ A_{11}-ზე (a_{11}-ის ალგებრულ დამატებაზე), მეორე ტოლობა გავამრავლოთ A_{21}-ზე და ა. შ. ბოლო ტოლობა გავამრავლოთ A_{n1}-ზე. მიღებული ტოლობები შევკრიბოთ. მივიღებთ:

$$x_1(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+...+a_{n1}A_{n1})+x_2(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+ ... +a_{n2}A_{n1})+...$$
$$+x_n(a_{1n}A_{11}+a_{2n}A_{21}+ ... +a_{nn}A_1)=b_1A_{11}+b_2A_{21}+ ... +b_nA_{n1}$$

აქედან გვაქვს:

$$x_1 \Delta = \Delta_1,$$

რადგან $\Delta \neq 0$, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$.

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \qquad (2)$$

მაშასადამე, თუ სისტემის ამონახსნია (x_1, x_2, ... x_n) მაშინ იგი მოიცემა (2) ფორმულებით. ამონახსნის ერთადერთობა დამტკიცებულია. ამონახსნის არსებობაში რომ დავრწმუნდეთ, საკმარისია ($\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, ..., \frac{\Delta_n}{\Delta}$) ჩავსვათ ყველა განტოლებაში უცნობების ნაცვლად და დავრწმუნდებით, რომ (2) სისტემის ამონახსნია.

თეორემა დამტკიცებულია.

განტოლებათა (1) სისტემა შეიძლება მატრიცულად ასე ჩავწეროთ:

$$A \cdot X=B, \qquad (3)$$

სადაც მატრიცები A, X და B ასე მოიცემა:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$$

ვთქვათ, A მატრიცის დეტერმინანტი ნული არ არის და იგი აღვნიშნოთ Δ ასოთი – $\det A=\Delta$ (ანუ A მატრიცა არაგადაგვარებულია). მაშინ არსებობს მისი შებრუნებული მატრიცა

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

მაშინ (3) ტოლობიდან (თუ არსებობს X, რომელიც აკმაყოფილებს (3)-ს) გვაქვს:

$$A^{-1}(A \cdot X)=A^{-1} \cdot B,$$

აქედან

$$(A^{-1}A) \cdot X=A^{-1}B,$$

აქედან $X=A^{-1}B$, რადგან $A^{-1}A$ ერთეულოვანი მატრიცაა.

მაშასადამე, ამონახსნი თუ არსებობს, ასე მოიცემა

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B.$$

ის რომ $A^{-1}B$ ამონახსნია, ჩასმით მოწმდება:

$$A(A^{-1} \cdot B)=(A \cdot A^{-1}) \cdot B=B.$$

ამრიგად, თუ $\Delta \neq 0$, სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და მატრიცულად ეს ამონახსნი ასე ჩაიწერება:

$$X=A^{-1} \cdot B.$$

აქედან ადვილად მივიღებთ კრამერის ფორმულებს:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

განვიხილოთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა, რომელიც შეიცავს m განტოლებას n უცნობით:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+ \dots +a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+ \dots +a_{2n}x_n=b_1$$
$$- - - - - -$$
$$a_1x_1+a_{m2}x_2+ \dots +a_{mn}x_n=b_m$$

$a_{11}, a_{12}, \dots a_{nn}$ რიცხვებს სისტემის კოეფიციენტები ეწოდება, $b_1, b_2, \dots, b$ რიცხვებს – თავისუფალი წევები. სისტემის ამონახსნი ეწოდება რიცხვთა ნებისმიერ n-ეულს – $c_1, c_2 \dots c_n$, რომელთა ჩასმით $x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობების ნაცვლად მივიღებთ ჭეშმარიტ ტოლობებს.

სისტემას ეწოდება თავსებადი, თუ მას აქვს ერთი მაინც ამონახსნი, თუ სისტემის არა აქვს ამონახსნი, მაშინ მას ეწოდება არათავსებადი. სისტემას

ეწოდება განუზღვრელი, თუ მას ერთზე მეტი ამონახსნი აქვს, შევნიშნოთ, რომ სისტემას თუ აქვს ერთზე მეტი ამონახსნი, მაშინ მას აქვს უამრავი ამონახსნი. ორ სისტემას ეწოდება ტოლფასი, როცა მათ აქვს ერთი და იგივე სიმრავლე ამონახსნებისა.

სიტემის ამოხსნა გაუსის მეთოდით.

მოცემულ სისტემაზე ვაწარმოებთ შემდეგი სახით გარდაქმნებს: 1) სისტემიდან ამოვიღებთ შემდეგი სახის განტოლებებს:

$$0 \cdot x_1+0 \cdot x_2+\ldots+0 \cdot x_n=0 \qquad (1)$$

2) რომელიმე განტოლების ორივე მხარეს ვუმატებთ სხვა განტოლების გამრავლებულს რაიმე რიცხვზე.

ცხადია, ამ გარდაქმნების შემდეგ მოცემული სისტემის ტოლფასი სისტემა მიიღება. კიდევ ერთი სახის გარდაქმნასაც ვასრულებთ – უცნობების გადანომრვასაც ვცვლით.

თუ სისტემაში ერთი მაინც შედის განტოლება:

$$0 \cdot x_1+0 \cdot x_2+\ldots+0 \cdot x_n=b \quad (b\neq 0) \qquad (2)$$

რომელსაც, ჩანს, რომ ამონახსნი არა აქვს, მაშინ სისტემაც არათავსებადია.

ვთქვათ, ახალი სისტემა ასეთი განტოლებას არ შეიცავს და ჩამოშორებულია (1) სახის განტოლებებიც. მაშინ ერთი მაინც განტოლება შეიცავს ნულისგან განსხვავებულ კოეფიციენტიან წევრს. შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ეს არის $a_{11}x_1$ წევრი, ე. ი. $a_{11}\neq 0$.

პირველ განტოლებას ვტოვებთ, ხოლო ყველა დანარჩენიდან გამოვრიცხავთ x_1 უცნობის შემცველ წევრებს. მაგალითად, თუ პირველს გავამრავლებთ $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$-ზე და დავუმატებთ მეორე განტოლებას, მაშინ მეორიდან გამორიცხება x_1 და ა. შ. შედეგად მივიღებთ მოცემულის ტოლფას სისტემას:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_n &= b \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ \ldots \\ a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n &= b'_m \end{aligned}$$

ცხადია, აქ განტოლებათა რიცხვი შეიძლება m-ზე ნაკლებიც იყოს, რადგან ამოვაგდეთ (1) სახის განტოლებები.

ვთქვათ, $a'_{22}\neq 0$. მაშინ იგივე პროცესს ჩავატარებთ – გამოვრიცხავთ x_2-ს მეორის შემდეგ ყველა განტოლებიდან. შედეგად მიიღება სისტემა:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
&\ldots \\
a''_{m3}x_3 + \ldots + a''_{mn}x_n &= b''_m
\end{aligned}
$$

გავაგრძელებთ ამ პროცესს. სისტემა მოიყვანება მის ტოლფას სისტემამდე:

$$
\begin{aligned}
c_{11}x_1+c_{12}x_2+\ldots+c_{1n}x_n&=d_1 \\
c_{22}x_2+\ldots c_{2n}x_n&=d_2 \\
&- - - - - \\
c_{kk}x_k+\ldots+c_{km}x_n&=d_k
\end{aligned}
$$

რომელშიც $c_{11}, c_{22}, \ldots c_k$ ნულისგან განსხვავებული რიცხვებია.

შეიძლება მოხდეს, რომ გარდაქმნის პროცესში (2) სახის განტოლება მივიღოთ, მაშინ სისტემა არათავსებადია.

განვიხილოთ ორი შესაძლო შემთხვევა:

1) $k=n$. მაშინ ბოლო განტოლება მიღებულ სისტემაში ერთ უცნობს შეიცავს, მას ერთი ამონახსნი აქვს: $x_n = \dfrac{d_n}{c_{nn}}$, ჩავსვამთ ამ მნიშვნელობას წინა განტოლებაში და ვიპოვით x_{n-1}-ს. შემდეგ x_n და x_{n-1}-ის მნიშვნელობებს ჩავსვამთ წინა განტოლებაში და მივიღებთ x_{n-2}-ს, და ა. შ. ვიპოვით ყველა უცნობს. ე. ი. ამ შემთხვევაში სისტემას ერთადერთი ამონახსნი აქვს.

2) $k<n$. მაშინ უკანასკნელი განტოლება შეიცავს ერთზე მეტ უცნობს, მას უამრავი ამონახსნი აქვს და სისტემასაც უამრავი ამონახსნი აქვს.

შევშინოთ, რომ ყველა ის გარდაქმნა, რომელსაც ვაწარმოებთ განტოლებებზე, ფაქტიურად ხორციელდება მატრიცაზე, რომელიც შედგება კოეფიციენტებისა და თავისუფალი წევრებისგან.

მაგალითი. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 10x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

ამოხსნა $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 10 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 1 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 7 & -20 \\ 0 & 1 & 7 & -20 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 7 & -20 \end{array}\right)$

ე. ი. მივიღეთ სისტემა:

$$
\begin{aligned}
&x_1+3x_2-2x_3=10 \\
&x_2-7x_3=-20
\end{aligned}
$$

მას აქვს უამრავი ამონახსნი: მეორე განტოლებიდან:
$x_2=-20+7x_3$, ჩავსვათ წინა განტოლებაში და ვიპოვოთ x_1, $x_1=70+23x_3$
ე. ი. ყველა ამონახსნი ასე ჩაიწერება:

$$\begin{cases} x_1 = 70 + 23x_3 \\ x_2 = -20 + 7x_3 \\ x_3 - \text{ნებისმიერი რიცხვია} \end{cases}$$